A retenir

Soit un triangle ABC . Alors : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$

Le principe

On utilise la relation de Chasles et la bilinéarité du produit scalaire

La démonstration

$AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} = AC^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$

A retenir

Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Le principe

On utilise Chasles et la définition du produit scalaire

La démonstration

Soit un cercle de centre O de diamètre [AB] . Soit M un point du cercle .
Alors $OM = OB = OA$
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) = MO^2 + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$
Or $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{MO} \cdot \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\right)$
Et O étant le milieu de [AB] , alors $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}$
De plus , $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times cos\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) = OA \times OB \times cos\pi = -OA^2 = -OM^2$
Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Astuce

On retrouve ainsi la propriété du collège , si M est un point du demi-cercle de diamètre [AB] , alors ABM est un triangle rectangle en M