★★ *Calcul vectoriel* ★★

1 Produit scalaire

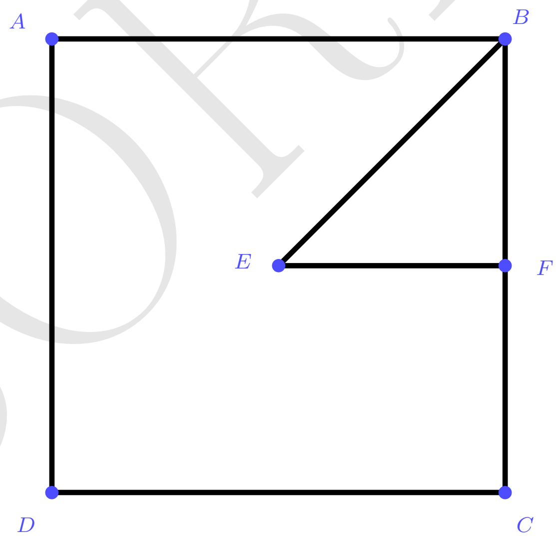
1.1 Définitions

Définition.

Soient A , B et C trois points du plan . On appelle produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ le nombre réel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$

Exemple.

Soit ABCD un carré de centre E tel que $AB = 6$ cm . Soit F le milieu de [BC] . Calculer $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EC}$



Propriété.

Soient A , B et C trois points du plan . Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) . Alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

Exemple.

Reprendre l'exemple précédent

Propriété.
Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ définis dans une base orthonormée . Alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy'$

Exemple.
Soient $\overrightarrow{u}(4;5)$ et $\overrightarrow{v}(-3;2)$.
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 4\times(-3)+5\times 2 = -2$

1.2 Propriétés du produit scalaire

Propriété.

- Le produit scalaire est symétrique c'est à dire que : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$
- Le produit scalaire est bilinéaire c'est à dire :
  - $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$
  - $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$
  - $k\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}\cdot(k\overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$

Propriété.

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$

Propriété.
Soit $\overrightarrow{u}(x;y)$ alors $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$

2 Applications du produit scalaire

2.1 Orthogonalité

Propriété.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$.

Propriété.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx'+yy' = 0$

Exemple.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}(-3;4)$ et $\overrightarrow{v}(8;6)$ sont ils orthogonaux ?

2.2 Norme de la somme de vecteurs

A retenir

$||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 + 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$

2.3 Formule d'Al-Kashi

Propriété.

Soit un triangle ABC . Alors : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times cos\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}\right)$

2.4 Lieux géométriques

Propriété.

Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$