Exercice 1 (10 points)

1. (a) *En juin 2017, on peut estimer qu'il y aura* $27500 - 150 = 27\,350$ *étudiants dans cette université.*

   (b) *A la rentrée de septembre 2017, il y aura à la suite de l'augmentation de 4 % :* $1,04 \times 27\,350 = 28\,444$ *étudiants.*

2. *Soit* u_n *le nombre d'étudiants en septembre de l'année 2016+n. En juin de l'année suivante (année* $(n+1)$*), 150 étudiants auront démissionné, pour un reste de* $u_n - 150$*. Puis à la rentrée de septembre de l'année* $(n+1)$*, le nombre d'étudiants aura subi une augmentation de 4%, soit* $1,04 \times (u_n - 150) = 1,04 \times u_n - 156$*. Donc en Septembre de l'année* $(n+1)$ *il y aura* $1,04u_n - 156$ *étudiants,*
   soit pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,04u_n - 156$.

3. *Recopier et compléter les lignes L5, L6, L7 et L9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.*

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3	Traitement :	n prend la valeur 0
L4		U prend la valeur 27 500
L5		Tant que $U \leqslant$ **33 000** faire
L6		n prend la valeur $\mathbf{n+1}$
L7		U prend la valeur $\mathbf{1,04 \times U - 156}$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie:	Afficher **n**

4. (a) *On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.*

   Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes; on arrondira les valeurs de U *à l'unité.*

	Init	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de U	27 500	28 444	29 426	30 447	31 509	32 613	33 762

   (b) *La valeur affichée en sortie de cet algorithme est :* $n = 6$.

5. *On cherche à calculer explicitement le terme général* u_n *en fonction de* n.

   Pour cela, on note (v_n) *la suite définie, pour tout entier naturel* n*, par* $v_n = u_n - 3\,900$.

   (a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 3900 = 1,04 \times u_n - 156 - 3900 = 1,04 \times u_n - 4056 = 1,04(u_n - 3900) = 1,04v_n$.
   La suite (v_n) *est donc géométrique de raison 1,04 et de premier terme* $v_0 = 27500 - 3900 = 23600$.

(b) *Donc pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 23600 \times 1,04^n$.*
De plus, On a $u_n = v_n + 3900$ donc $u_n = 3900 + 23600 \times 1,04^n$

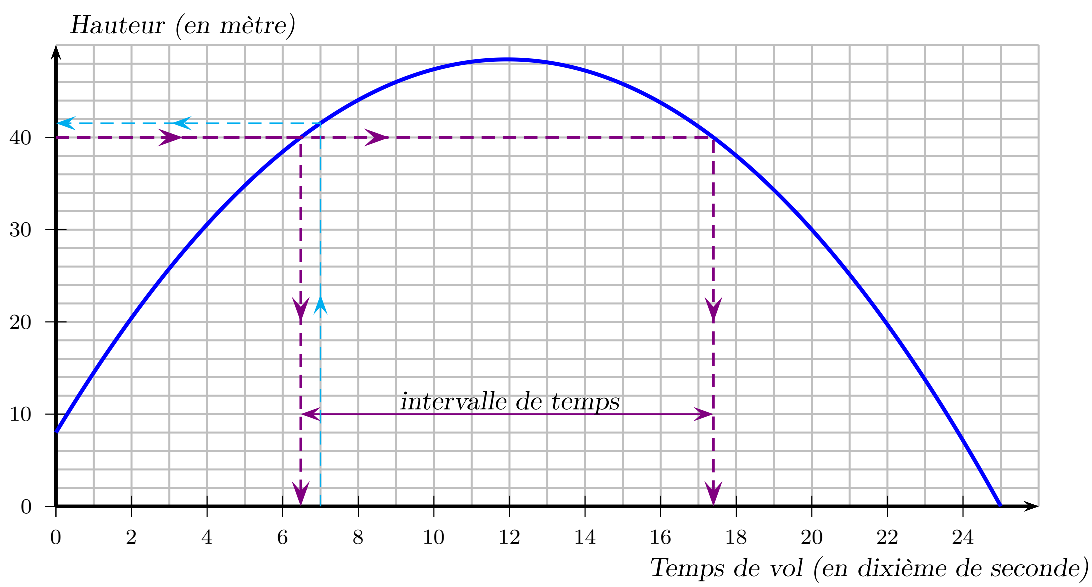
(c) *La suite (v_n) est une suite géométrique de $q = 1,04$. $q > 1$ donc la limite de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini est égale à l'infini. Donc la limite de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini est aussi égale à l'infini. Le nombre d'étudiants de cette université ne se stabilisera jamais, et continuera à augmenter à l'infini dépassant toute limite de capacité que l'on souhaiterait imposer.*

Exercice 2 (10 points)

À l'occasion d'un festival pyrotechnique, un artificier se prépare à lancer des fusées à partir d'une plate-forme située à 8 mètres de hauteur. Il dispose de deux types de fusée, notés A et B.

Partie A

La hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type A en fonction de leur temps de vol x, en dixième de seconde, est modélisée par la courbe ci-dessous.



Avec la précision permise par le graphique,

1. *la hauteur qu'atteindra la fusée après 0,7 seconde de vol est d'environ 41,7*m. *Nous lisons l'ordonnée du point d'abscisse 7 appartenant à la courbe.*

2. *l'intervalle de temps auquel doit appartenir x pour satisfaire à cette contrainte, la fusée doit exploser à une altitude supérieure à 40 mètres, est approximativement [6,5 ; 17,4]. Nous lisons les abscisses des points d'ordonnée 40, ce qui donne les bornes de l'intervalle et nous considérons toutes les abscisses pour lesquelles l'ordonnée du point de la courbe est supérieure.*

Partie B

On modélise la hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type B en fonction de leur temps de vol x, en dixième de seconde, par la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 20] par: $f(x) = -0,5x^2 + 10x + 8$.

Comme dans le cas des fusées de type A, l'explosion des fusées de type B doit avoir lieu lorsque celles-ci sont situées à une altitude supérieure ou égale à 40 mètres. On cherche à déterminer l'intervalle dans lequel doit se trouver x pour satisfaire à cette contrainte.

1. (a) *Montrons que pour satisfaire à la contrainte posée, x doit être solution de l'inéquation* $-0{,}5x^2 + 10x - 32 \geqslant 0$.

   Pour que la contrainte soit satisfaite, nous devons résoudre $f(x) \geqslant 40$ c'est-à-dire $-0{,}5x^2 + 10x + 8 \geqslant 40$ *ou* $-0{,}5x^2 + 10x + 8 - 40 \geqslant 0$.

   En simplifiant, nous obtenons l'inéquation proposée.

   (b) *Dressons le tableau de signes de la fonction qui à x associe $-0,5x^2 + 10x - 32$ sur l'intervalle [0 ; 20]*

   Déterminons d'abord les racines de $-0{,}5x^2+10x-32$. Étant un trinôme du second degré calculons Δ.

   $\Delta = 10^2 - 4 \times (-0{,}5) \times (-32) = 100 - 64 = 36$. $\Delta > 0$, *le trinôme admet deux racines distinctes :*

   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $\quad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

   $x_1 = \dfrac{-10-\sqrt{36}}{2 \times (-0{,}5)} = \dfrac{-16}{-1} = 16$; $\quad x_2 = 10 - 6 = 4$.

   Lorsque $x_1 < x_2$, un trinôme du second degré est du signe de a pour $x \in]-\infty\ ;\ x_1[\cup]x_2\ ;\ +\infty[$ *et du signe de $(-a)$ pour* $x \in]x_1\ ;\ x_2[$.

   d'où :

   Pour $x \in\ ]-\infty\ ; 4[\cup]16\ ;\ +\infty[, \quad -0{,}5x^2 + 10x - 32 < 0$,

   pour $x \in]4\ ;\ 16[, \quad -0{,}5x^2 + 10x - 32 > 0$

   Il en résulte alors sur [0 ; 20] :

x	0		4		16		20
signe de $-0{,}5x^2 + 10x - 32$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   L'intervalle dans lequel doit se trouver x pour satisfaire à cette contrainte est [4 ; 16]

2. (a) *Pour tout réel x de l'intervalle [0; 20], calculons $f'(x)$, f' étant la fonction dérivée de f.*

   $f'(x) = -0{,}5(2x) + 10 = -x + 10$

   (b) *L'artificier souhaite connaître le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe représentative de f.*

   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est le nombre dérivé de la fonction en a.

Le coefficient directeur en 0 est $f'(0)$ *soit* 10. *La tangente en 0 à la courbe a pour coefficient directeur 10.*

3. *Pour des raisons d'esthétique, l'artificier souhaite faire exploser ses fusées de type B lorsque celles-ci seront à leur hauteur maximale.*

   Lorsque $f'(x) = 0$, *la fonction peut admettre un extremum. Puisque la fonction dérivée s'annule en 10 en étant positive avant 10 et négative après, la fonction admet un maximum en 10. L'artificier doit alors programmer un temps de vol avant explosion d'une seconde ou dix-dixièmes.*