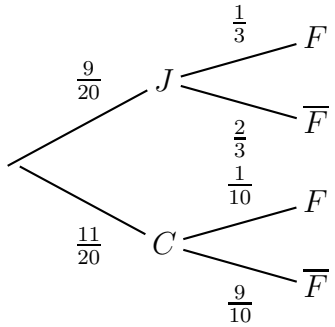
DS 9 spécialité maths première 16 mai 2025

Exercice 1 (4 points)

1. (a) *On peut utiliser un arbre pondéré :*



(b) *Il y a en tout* $90+110=200$ *morceaux stockés. Donc* $p(J)=\dfrac{90}{200}=\dfrac{45}{100}=0,45$.

(c) *Sur les 90 morceaux de jazz* $\frac{1}{3}$ *sont français, donc* $p_J(F)=\frac{1}{3}$.

(d) $p(J\cap F)=p(J)\times p_J(F)=0,45\times\frac{1}{3}=0,15$.

(e) *On calcule de même* $p(C\cap F)=p(C)\times p_C(F)=\frac{11}{20}\times\frac{1}{10}=\frac{11}{200}$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(F)=p(J\cap F)+p(C\cap F)=0,15+\frac{11}{200}=\frac{15}{100}+\frac{11}{200}=\frac{30}{200}+\frac{11}{200}=\frac{41}{200}=0,205$.

2. *Calculons la probabilité de n'écouter aucun morceau de jazz : elle est égale à* $\left(\frac{11}{20}\right)^3$, *donc la probabilité qu'il ait écouté au moins un morceau de jazz est égale à*
$1-\left(\frac{11}{20}\right)^3\approx 0,834$.

Exercice 2 (4 points)

1. *On a bien* $u_0=50$ *et chaque année* n *s'il y a* u_n *milliers d'arbres on en abat* $0,05u_n$ *: il en reste donc* $u_n-0,05u_n=0,95u_n$ *et on en plante 3 milliers, donc*
$u_{n+1}=0,95u_n+3$.

2. (a) *Quel que soit le naturel* n,
$v_{n+1}=60-u_{n+1}=60-(0,95u_n+3)=57-0,95u_n=0,95\left(\frac{57}{0,95}-u_n\right)=0,95\left(60-u_n\right)=0,95v_n$.
L'égalité $v_{n+1}=0,95v_n$ *montre que la suite* (v_n) *est géométrique de raison 0,9.*

(b) *Le premier terme* $v_0=60-u_0=60-50=10$.
On sait que $v_n=v_0\times 0,95^n=10\times 0,95^n$

(c) *On a* $v_n=60-u_n\iff u_n=60-v_n=60-10\times 0,95^n$ *pour tout entier naturel* n.

3. *2015 correspond à* $n=5$, *d'où* $u_5=60-10\times 0,95^5\approx 52,262$, *donc 52262 arbres.*

4. (a) $u_{n+1}-u_n=60-10\times 0,95^{n+1}-(60-10\times 0,95^n)=-10\times 0,95^{n+1}+10\times 0,95^n=10\times 0,95^n(1-0,95)=0,5\times 0,9^n$.

(b) *Comme* $0,5>0$ *et* $0,95^n>$ *quel que soit le naturel* n *le résultat précédent montre que* $u_{n+1}-u_n>0$ *quel que soit* n *: la suite est donc croissante.*

5. *10 % de 50 représentent* $0,1 \times 50 = 5$*.A la calculatrice : il faudra donc attendre 14 ans, soit en 2024.*

6. *Comme* $0 < 0,95 < 1$*, on sait que* $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$*, donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} 10 \times 0,95^n = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 60$ *soit 60000 arbres.*

Exercice 3 (4 points)

1. $f'(0)$ *est égal à 2* ***Réponse B***

2. $f'(x)$ *est positif sur l'intervalle* $]-2\ ;\ 2[$ ***Réponse C***

3. *Une équation de la tangente à la courbe* $\mathcal{C}_f$ *au point D est* $y = -x + 6,5$ ***Réponse A***

4. *L'équation* $\exp[f(x)] = 1$ *équivaut à* $f(x) = 0$ *, elle admet une solution.* ***Réponse A***

Exercice 4 (4 points)

Dans un repère orthonormé , on donne les points A(3;7) , B(1;2) et C(5;3) .

1. *Déterminer une équation de la droite d perpendiculaire à (AB) et passant par C .*

   Soit M(x;y) un point de d . Alors $\overrightarrow{AB}(-2;-5)$ *et* $\overrightarrow{CM}(x-5;y-3)$ *sont orthogonaux donc :*

   $-2(x-5) - 5(y-3) = 0 \iff -2x - 5y + 25 = 0$

2. *Déterminer les coordonnées de E point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées .*

   $x = 0$ *donc* $-5y + 25 = 0 \iff y = 5$ *donc E(0;5)*

3. *Déterminer une équation du cercle de diamètre [AB]*

   Soit I le milieu de [AB] : $I(2;\frac{9}{2})$

   $AB = \sqrt{29}$ *donc* $R = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$

   Donc une équation du cercle est :

   $(x-2)^2 + (y-\frac{9}{2})^2 = \dfrac{29}{4}$

4. *Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle de diamètre [AB] avec l'axe des ordonnées .*

   $x = 0$ *donc on doit résoudre :* $(0-2)^2 + (y-\frac{9}{2})^2 = \dfrac{29}{4} \iff y^2 - 9y + 4 + \dfrac{81}{4} - \dfrac{29}{4} = 0 \iff y^2 - 9y + 17 = 0$

   $\Delta = 13$ *donc* $y_1 = \dfrac{9+\sqrt{13}}{2}$ *et* $y_2 = \dfrac{9-\sqrt{13}}{2}$

   Donc deux points d'intersection de coordonnées : $(0;\dfrac{9+\sqrt{13}}{2})$ *et* $(0;\dfrac{9-\sqrt{13}}{2})$

Exercice 5 (4 points)

1. • $f(0) = \dfrac{80}{1+4e^{-0,3\times 0}} = \dfrac{80}{1+4e^{0}} = \dfrac{80}{1+4\times 1} = \dfrac{80}{5} = 16$

   • $f(20) = \dfrac{80}{1+4e^{-0,3\times 20}} = \dfrac{80}{1+4e^{-6}} \approx 79,21$

2. *En utilisant les formules suivantes* $(\dfrac{1}{u})' = -\dfrac{u'}{u^2}$ *et* $(e^u)' = u'e^u$ *donc* $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[$ *on a :*

   $f'(x) = 80 \times \dfrac{-4(-0,3e^{-0,3x})}{(1+4e^{-0,3x})^2} = \dfrac{96e^{-0,3x}}{(1+4e^{-0,3x})^2} > 0$ *puisque car*

   $e^{-0,3x} > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et que* $(1+4e^{-0,3x})^2 > 0$ *donc la fonction* f *est croissante sur l'intervalle* $[0\ ;\ +\infty[$

3. $e^{-0,3x} > 0$ *donc* $4e^{-0,3x} > 0$ *d'où* $1+4e^{-0,3x} > 1$. *Par conséquent*

   $\dfrac{1}{1+4e^{-0,3x}} < 1$ *donc* $\dfrac{80}{1+4e^{-0,3x}} < 80$.

   On a donc démontré que pour tout x *appartenant à* $[0\ ;\ +\infty[$ *on a*

   $f(x) < 80$. *On en déduit que la courbe* C_f *reste toujours en dessous de la droite d'équation* $y = 80$ *sur l'intervalle* $[0\ ;\ +\infty[$.

4. *À l'aide du graphique, on peut déterminer, selon les valeurs de* x *le signe de* $7x - f(x)$ *pour* x *appartenant à l'intervalle* $[0\ ;\ +\infty[$

x	*0*	x_0		$+\infty$
D	*est en dessous de* C_f	*coupe* C_f	*est au dessus de* C_f	
$7x - f(x)$	$-$	*0*	$+$	

Partie B : Interprétation économique

1. *Le montant des coûts fixes c'est-à-dire le montant des coûts lorsque la quantité produite est nulle est* $f(0) = 16$ *centaines d'euros =1600 euros*

2. *Le coût total de production des thermomètres ne peut atteindre 8100 euros par jour car pour tout* x *appartenant à* $[0\ ;\ +\infty[$ *on a* $f(x) < 80$ *centaines d'euros.*

3. *Le prix de vente d'un thermomètre est fixé à 7 euros. La recette journalière, exprimée en centaines d'euros, est donc donnée par* $R(x) = 7x$.
   L'entreprise réalise un bénéfice lorsque $7x > f(x)$ *c'est-à-dire* $7x - f(x) > 0$ *c'est-à-dire* $x > x_0 \approx 9,02$ *centaines de thermomètres c'est-à-dire* $x > 902$ *thermomètres.*