Exercice 1 (10 points)

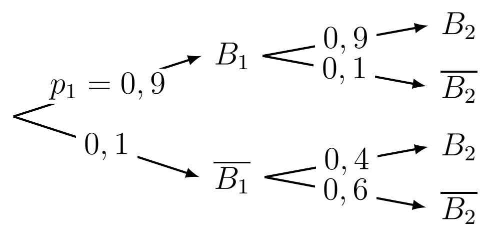
Interprétons l'énoncé :

si n est un entier naturel, la phrase , lorsque la trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est 0,9 , correspond à : $P_{B_n}(B_{n+1}) = 0,9$.

la phrase suivante se traduit par : $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = 0,4$.

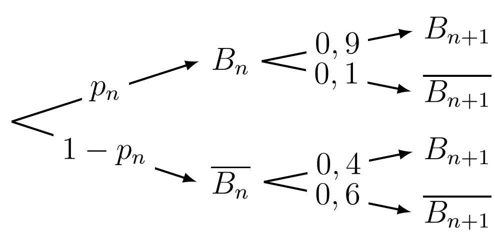
1. *On a donc* $p_1 = P(B_1) = P(B_0) \times P_{B_0}(B_1) = 1 \times 0,9 = 0,9$. *On a* $p_1 = 0,9$.

   Pour déterminer p_2, traçons un arbre :

   Les évènements B_1 et $\overline{B_1}$ partitionnant l'univers, la loi des probabilités totales donne :
   $p_2 = P(B_2) = P\Big(B_1 \cap B_2\Big) + P\Big(\overline{B_1} \cap B_2\Big) = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 = 0,81 + 0,04 = 0,85.$
   Ce calcul confirme bien que l'on a : $p_2 = 0,85$.

2. *On va donc avoir un arbre très similaire au précédent : les probabilités conditionnelles restant les mêmes.*

3. *Là encore, les évènements B_n et $\overline{B_n}$ partitionnent l'univers, la loi des probabilités totales donne :*
   $p_{n+1} = P(B_{n+1}) = P\Big(B_n \cap B_{n+1}\Big) + P\Big(\overline{B_n} \cap B_{n+1}\Big) = p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,4 = 0,9p_n + 0,4 - 0,4p_n$
   Donc on a bien $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$ *: on a donc bien établi la relation de récurrence annoncée.*

4. (a) *Établissons la relation de récurrence de la suite (u_n). Soit n un entier naturel :*
   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,8 \quad \text{par définition de la suite } (u_n) \\ &= (0,5p_n + 0,4) - 0,8 \quad \text{par la relation de récurrence de la suite } (p_n) \\ &= 0,5p_n - 0,4 \\ &= 0,5(p_n - 0,8) \\ &= 0,5u_n \quad \text{par définition de la suite } (u_n) \end{aligned}$$
   La relation de récurrence de la suite (u_n) est donc bien celle d'une suite géométrique, de raison $q = 0,5$.
   Le premier terme de la suite est $u_0 = p_0 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$.

(b) *On peut donc donner la forme explicite du terme général de la suite géométrique :*

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n = 0,2 \times 0,5^n$.

On en déduit : $u_n = p_n - 0,8 \iff p_n = u_n + 0,8 = 0,2 \times 0,5^n + 0,8$.

(c) *La raison de la suite géométrique u est comprise entre -1 et 1, strictement, donc la suite (u_n) converge vers 0.*

Par limite de la somme, on en déduit que la suite p converge vers $0,8$.

Partie B

L'événement : avoir au moins une trottinette en bon état est l'événement contraire d'avoir toutes les trottinettes en mauvais état ; appelons Z cet événement .

Alors $p(Z) = 0,2^5$ et donc $p = 1 - 0,2^5 = 0,99968$

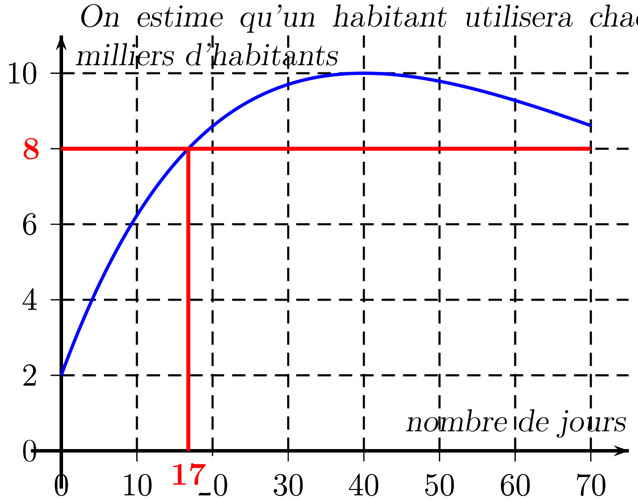
Exercice 2 (10 points)

L'évolution de la population d'une station balnéaire pour l'été 2015 a été modélisée par une fonction f, définie sur l'intervalle [0 ; 70], dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1er juillet, $f(x)$ désigne la population en milliers d'habitants.

Ainsi $x = 30$ correspond au 31 juillet et $f(30)$ représente la population qu'il est prévu d'accueillir le 31 juillet.

On estime qu'un habitant utilisera chaque jour entre 45 et 55 litres d'eau par jour.



Partie A

1. (a) *D'après le graphique, le maximum de la fonction f est $f(40) = 10$.*

   Le nombre 40 correspond au 10 août, et 10 correspond à 10000 habitants.

   Le nombre maximum d'habitants est donc de 10000 et est atteint le 10 août.

   (b) *Chaque habitant consomme entre 45 et 55 litres d'eau; donc 10000 habitants consommeront entre 450000 et 550000 litres au maximum.*

   Comme la commune peut fournir 600000 litres d'eau par jour, c'est suffisant pour la journée la plus chargée, donc pour toutes les autres.

2. *Le maximum d'habitants prévus est 10000 donc 80 % du maximum est égal à 8000 habitants.*

   Chercher le nombre de jours durant lesquels le nombre d'habitants est supérieur à 80 % du nombre maximal prévu, revient à résoudre sur l'intervalle [0;70] l'inéquation $f(x) \geq 8$ *(voir graphique).*

   $f(x) \geq 8$ *sur l'intervalle [17;70], soit pendant 53 jours.*

Partie B

On admet que la fonction f *est définie sur l'intervalle [0 ; 70] par* $f(x) = 2 + 0,2xe^{-0,025x+1}$

1. $f(9) = 2 + 0,2 \times 9 \times e^{-0,025\times 9+1} \approx 5,90706$

   $x = 9$ *correspond au 10 juillet; il y a une estimation de* $5,907 \times 1000 = 5907$ *habitants à cette date. Chaque habitant consomme au maximum 55 litres, donc la consommation d'eau maximale le 10 juillet sera de* $5907 \times 55 \approx 324885$ *litres que l'on peut majorer par* 324890 *litres.*

2. (a) *La fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *donc sur [0;70] et:*
   $f'(x) = 0,2 \times 1 \times e^{-0,025x+1} + 0,2x \times (-0,025)e^{-0,025x+1} = (0,2 - 0,005x)e^{-0,025x+1}$

   (b) *Pour tout* x *réel,* $e^{-0,025x+1} > 0$ *donc* $f'(x)$ *est du signe de* $0,2 - 0,005x$.

   $$0,2 - 0,005x > 0 \iff 0,2 > 0,005x \iff \frac{0,2}{0,005} > x \iff 40 > x$$

x	0		40		70
$0,2 - 0,005\,x$		+	0	−	
$f'(x)$		+	0	−	

   (c) *D'après le signe de sa dérivée, la fonction* f *est croissante sur [0;40], puis décroissante sur [40;70]; elle atteint donc un maximum pour* $x = 40$. *Cette valeur de* x *correspond au 10 août et à un maximum de population dans la station, donc à un maximum de consommation d'eau.*