Exercice 1 (4 points)

Kevin possède un lecteur MP3, dans lequel il a stocké 90 morceaux de jazz et 110 morceaux de musique classique. Un tiers des 90 morceaux de jazz est composé par des auteurs français. Un dixième des 110 morceaux de musique classique est composé par des auteurs français.

1. *Afin d'écouter un morceau de musique, Kevin lance une lecture aléatoire sur son lecteur MP3.*

   On admet que cela revient à choisir un morceau de musique de manière équiprobable. On note :

   J l'évènement le morceau de musique écouté est un morceau de jazz ;

   C l'évènement le morceau de musique écouté est un morceau de musique classique ;

   F l'évènement l'auteur du morceau de musique écouté est français

   (a) *Faire un arbre de probabilités .*

   (b) *Quelle est la probabilité que le morceau de musique écouté par Kevin soit un morceau de jazz ?*

   (c) *Sachant que Kevin a écouté un morceau de jazz, quelle est la probabilité que l'auteur soit français ?*

   (d) *Calculer la probabilité que le morceau de musique écouté par Kevin soit un morceau de jazz composé par un auteur français.*

   (e) *Quelle est la probabilité que le morceau de musique écouté par Kevin soit composé par un auteur français ?*

2. *Afin d'écouter trois morceaux de musique, Kevin lance trois fois une lecture aléatoire sur son lecteur MP3. Calculer la probabilité qu'il ait écouté au moins un morceau de jazz.*

Exercice 2 (4 points)

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010+n)$. En 2010, la forêt possède 50000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3000 arbres.

1. *Montrer que la situation peut être modélisée par :*

   $u_0 = 50$ *et pour tout entier naturel* n *par la relation :* $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$.

2. *On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60 - u_n$.*

   (a) *Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,95$.*

   (b) *Calculer v_0. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.*

(c) *Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 60 - 10 \times (0,95)^n$.*

3. *Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.*

4. (a) *Vérifier que pour tout entier naturel n, on a l'égalité*

$$u_{n+1} - u_n = 0,5 \times (0,95)^n.$$

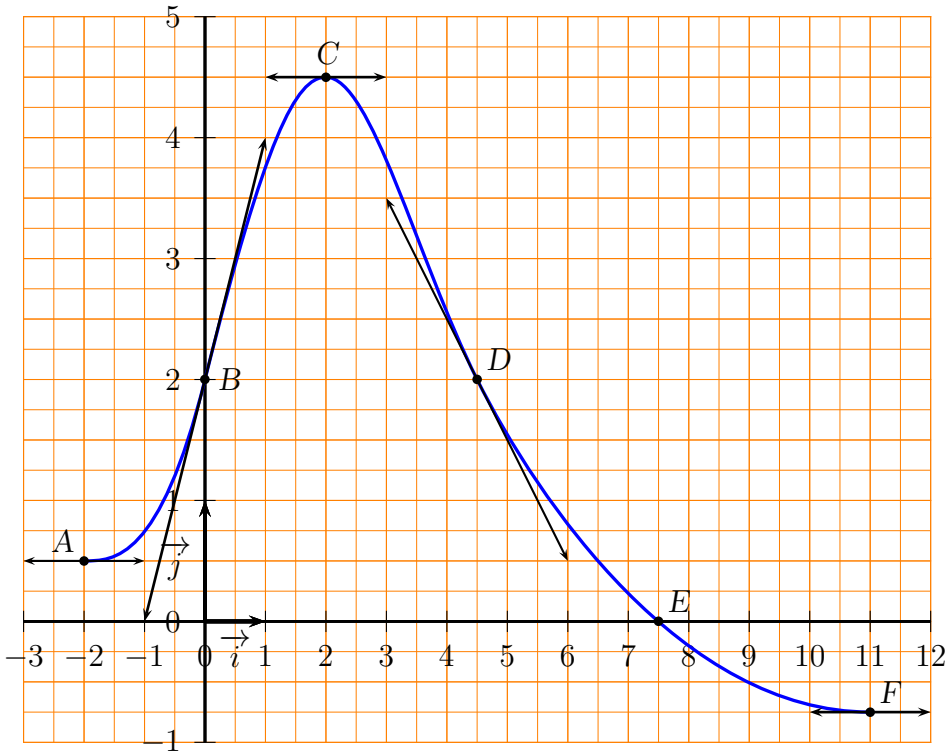
(b) *En déduire la monotonie de la suite.*

5. *Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010.*

6. *Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter.*

Exercice 3 (4 points)

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 11]$, et on donne sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\ )$, figure ci-dessous.



On sait que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points $A(-2\ ;\ 0,5)$, $B(0\ ;\ 2)$, $C(2\ ;\ 4,5)$, $D(4,5\ ;\ 2)$, $E(7,5\ ;\ 0)$ et $F(11\ ;\ -0,75)$.

Les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points A, B, C, D et F sont représentées sur la figure. On utilisera les informations de l'énoncé et celles lues sur la figure pour répondre aux questions.

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune

justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève $0,25$ point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif la note est ramenée à O.

1. *$f'(0)$ est égal à :*

   A : $\frac{1}{2}$ **B :** 2 **C :** 4

2. *$f'(x)$ est strictement positif sur l'intervalle :*

   A : $]0\ ;\ 11[$ **B :** *]0 ; 7,5[* **C :** $]-2\ ;\ 2[$

3. *Une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D est :*

   A : $y = -x + 6,5$ **B :** $y = x - 6,5$ **C :** $y = -2x + 11$

4. *Sur l'intervalle $[-2\ ;\ 11]$, l'équation $\exp[f(x)] = 1$:*

   A : *admet une solution.*

   B : *admet deux solutions.*

   C : *n'admet aucune solution.*

Exercice 4 (4 points)

Dans un repère orthonormé , on donne les points A(3;7) , B(1;2) et C(5;3) .

1. *Déterminer une équation de la droite d perpendiculaire à (AB) et passant par C .*
2. *Déterminer les coordonnées de E point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées .*
3. *Déterminer une équation du cercle de diamètre [AB]*
4. *Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle de diamètre [AB] avec l'axe des ordonnées .*

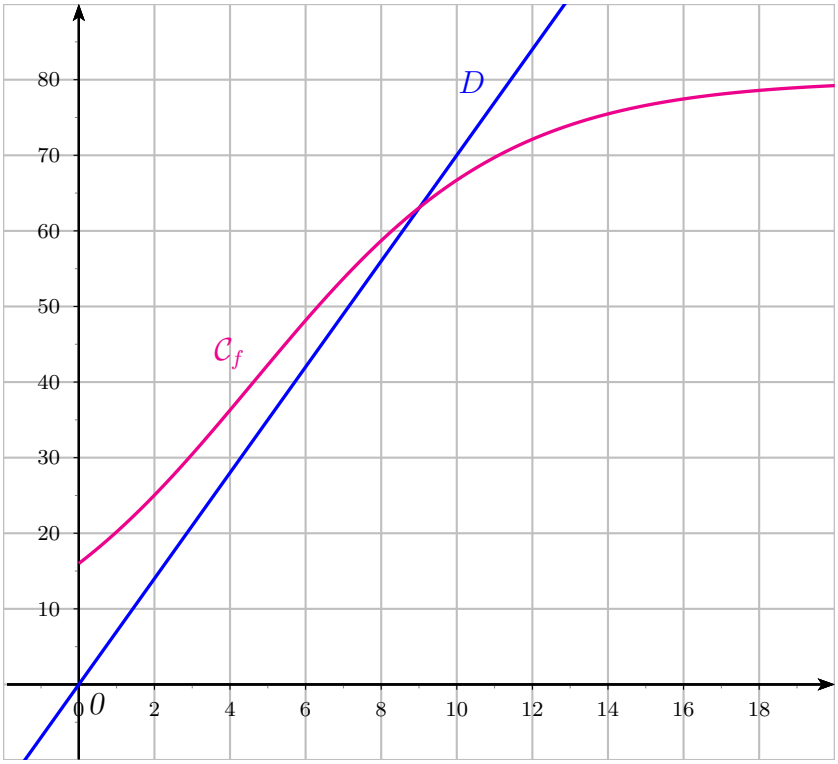
Exercice 5 (4 points)

Soit f la fonction dérivable définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{80}{1 + 4e^{-0,3x}}.$$

Dans un repère orthogonal, on note C_F la courbe représentative de la fonction f et D la droite d'équation $y = 7x$.

On admet que la courbe C_f et la droite D se coupent en un seul point d'abscisse x_0 et on donne $x_0 \approx 9,02$



1. *Calculer $f(0)$ et la valeur arrondie au centième de $f(20)$*

2. *Démontrer que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$*

3. *Déterminer la position relative de la courbe C_f et de la droite d'équation $y = 80$*

4. *A l'aide du graphique , déterminer , selon les valeurs de x, le signe de $7x - f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$*

Partie B : Interprétation économique

Une entreprise peut produire chaque jour au maximum 2 000 thermomètres de bain pour bébé. On note x le nombre de centaines de thermomètres produits chaque jour travaillé, x appartenant à l'intervalle [0 ; 20].

On suppose que le coût total de production par jour, exprimé en centaines d'euros, est égal à $f(x)$), où f est la fonction définie dans la partie A.

1. *Déterminer le montant des « coûts fixes », c'est-à-dire le montant des coûts lorsque la quantité produite est nulle.*

2. *Le coût total de production des thermomètres peut-il atteindre 8 100 euros par jour ? Justifier.*

3. *Le prix de vente d'un thermomètre est fixé à 7 euros. La recette journalière, exprimée en centaines d'euros, est donc donnée par $R(x) = 7x$. Pour quelles productions journalières de thermomètres l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ? Justifier.*