Exercice 1 (7 points)

Dans un repère orthonormé , on donne les points A(6;9) , B(12;3) , C(9;0) et D(3;6) .

1. *Montrer que ABCD est un parallélogramme*

   $\overrightarrow{AB}(6;-6)$ *et* $\overrightarrow{DC}(6;-6)$ *donc* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *et ABCD est un parallélogramme*

2. *Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B .*

   $\overrightarrow{BC}(-3;-3)$ *et* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 6 \times (-3) + (-6) \times (-3) = 0$ *donc (AB) et (BC) sont perpendiculaires donc ABC est rectangle en B .*

3. *Calculer* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ *et en déduire la valeur de* $\widehat{BAC}$

   $\overrightarrow{AC}(3;-9)$ *donc* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18 + 54 = 72$

   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$ *donc* $cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{72}{6\sqrt{2} \times 3\sqrt{10}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ *donc* $\widehat{BAC} = 26,56$

Exercice 2 (6 points)

1. (a) *On lit* $f(1) = 0, \quad f(2) = 4, \quad f(4) = 0$ *et* $f'(2) = 0$.

   (b) $f(1) = 0 \iff a + b - 16 = 0$ *et*
   $f(4) = 0 \iff 4a + b - 4 = 0$ *donnent par différence* $3a + 12 = 0 \iff a = -4$, *puis* $b = 16 - a = 16 - (-4) = 20$.

2.
$$f(x) = -4x + 20 - \frac{16}{x}.$$

   (a) *Comme* $x \neq 0$ *la fonction est dérivable sur [1 ; 6] et sur cet intervalle :*
   $f'(x) = -4 + \dfrac{16}{x^2} = \dfrac{16 - 4x^2}{x^2} = \dfrac{4\,(4 - x^2)}{x^2} = \dfrac{2(2+x)(2-x)}{x^2}$.
   Comme sur [1 ; 6], $x^2 > 0$, $2 + x > 0$, *le signe de* $f'(x)$ *est celui de* $2 - x$.
   Donc si $1 \leqslant x < 2$, $\quad f'(x) > 0$ *: la fonction est croissante et*
   si $2 < x \leqslant 6$, $\; f'(x) < 0$ *: la fonction est décroissante ce qui correspond bien au graphe de* f.

   (b)

x	1		2		4		6
f	0	↗	4	↘	0	↘	

   (c) *On lit sur le tableau de variations que :*
   sur [1 ; 4[$f(x) > 0$ *et sur]4 ; 6],* $f(x) < 0$.

Exercice 3 (7 points)

A - Observation d'une suite de nombres

1. *Il semble que la limite de la suite* (u_n) *soit voisine de 20.*

2. *On a* $\dfrac{104,6}{161} \approx 0,649$ *;*
   $\dfrac{70,76}{104,6} \approx 0,676$ *;*
   $\dfrac{50,456}{70,76} \approx 0,713$ *: il n'existe pas de réel* q *tel que* $u_{n+1} = q \times u_n$ *: la suite n'est pas géométrique.*

B - Étude de la suite

1. *On a* $u_1 = 0,6 \times 161 + 8 = 96,6 + 8 = 104,6$ *et de même* $u_2 = 70,76,\ u_3 = 50,456$*.*

   Donc $u_4 = 0,6 \times 50,456 + 8 = 38{,}273\,6$*.*

2. *Pour tout entier naturel* n*, on a :*

   $v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = 0,6u_n + 8 - 20 = 0,6u_n - 12 = 0,6\,(u_n - 20) = 0,6v_n$.

   L'égalité $v_{n+1} = 0,6v_n$ *vraie pour tout entier* n *montre que la suite* (v_n) *est géométrique de raison 0,6, de premier terme*$v_0 = u_0 - 20 = 161 - 20 = 141$*.*

3. *On sait qu'alors pour tout entier* n*, on a* $v_n = 141 \times 0,6^n$*.*

   Or $v_n = u_n - 20 \iff u_n = v_n + 20 = 141 \times 0,6^n + 20$*.*

4. *Comme* $0 < 0,6 < 1$*, on a* $\lim\limits_{n\to\infty} 0,6^n = 0$*, donc :*

   $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 20$*. La conjecture faite dans la partie A est vraie.*

ANNEXE