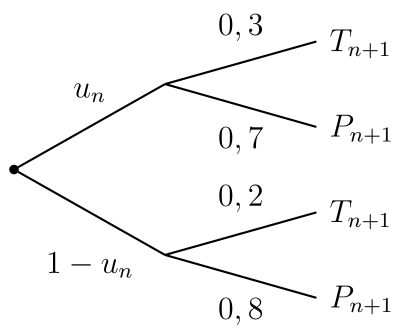
DS 9 spécialité maths première 16 mai 2022

Exercice 1 (10 points)

1. (a) T_1 et P_1 étant équiprobables, $p(T_1) = p(P_1) = 0,5$.
   D'après l'énoncé la probabilité de prendre le toboggan après avoir pris le plongeoir est égale à $p_{P_1}(T_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.
   Toujours d'après l'énoncé $p_{T_1}(T_2) = 0,3$.

   (b) D'après le principe des probabilités totales :
   $p(T_2) = p(T_1 \cap T_2) + p(P_1 \cap T_2) = 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2 = 0,15 + 0,1 = 0,25 = \dfrac{1}{4}$.

   (c) Recopier et compléter l'arbre suivant :



   (d) Toujours d'après le principe des probabilités totales :
   $u_{n+1} = p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(P_n \cap T_{n+1}) = u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 = 0,3u_n + 0,2 - 0,2u_n = 0,1u_n + 0,2$.

   (e) La calculatrice donne $u_1 = 0,5$; $u_2 = 0,25$; $u_3 = 0,225$; $u_4 = 0,225$; $u_5 = 0,2225$.
   Il semble que u_n ait pour limite $0,222\ldots$.

2. (a) $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{2}{9} = 0,1u_n + 0,2 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{10}u_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{10}u_n - \dfrac{1}{45} = \dfrac{1}{10}\left(u_n - \dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{1}{10}v_n$.
   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$; son premier terme est $v_1 = u_1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{18}$.

   (b) On sait que $v_n = v_1 \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} = \dfrac{5}{18}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$.
   Comme $u_n = v_n + \dfrac{2}{9}$, on a $u_n = \dfrac{2}{9} + \dfrac{5}{18}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$.

   (c) Comme $0 < \dfrac{1}{10} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{2}{9}$.
   Or $\dfrac{2}{9} = 0,222\ldots$ ce qui valide la conjecture faite à la question 1. e.

Exercice 2 (10 points)

Dans un repère orthonormé , on donne les points A(2;2) , B(4;5) et C(7;2) . On note I le milieu de [AC] et J le milieu de [BC] .

1. *Déterminer une équation de la médiatrice de [BC]*

   $J(\frac{11}{2};\frac{7}{2})$ et $\overrightarrow{BC}(3;-3)$

   Soit M(x;y) un point de la médiatrice

   $\overrightarrow{JM}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \iff 3(x-\frac{11}{2})-3(y-\frac{7}{2})=0 \iff x-y-2=0$

2. *Déterminer une équation de la médiatrice de [AC]*

   $I(\frac{9}{2};2)$ et $\overrightarrow{AC}(5;0)$

   Soit M(x;y) un point de la médiatrice

   $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \iff 5(x-\frac{9}{2})=0 \iff x=\frac{9}{2}$

3. *Déterminer les coordonnées de K centre du cercle circonscrit du triangle ABC*

   K est le point d'intersection des deux médiatrices précédentes donc $x=\frac{9}{2}$ et $y=x-2=\frac{5}{2}$ *donc* $K(\frac{9}{2};\frac{5}{2})$

4. *Déterminer une équation du cercle circonscrit du triangle ABC*

   Le centre du cercle est K et le rayon est AK

   $AK=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{26}{4}}$

   $(x-\frac{9}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{26}{4} \iff x^2-9x+y^2-5y+20=0$

5. *Déterminer les coordonnées de L et R points d'intersection du cercle circonscrit avec la médiatrice de [AC]*

   $x=\frac{9}{2}$ *donc* $(\frac{9}{2}-\frac{9}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{26}{4} \iff y-\frac{5}{2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$ *ou* $y-\frac{5}{2}=-\frac{\sqrt{26}}{2}$ *donc* $L(\frac{9}{2};\frac{\sqrt{26}+5}{2})$ *et* $R(\frac{9}{2};\frac{5-\sqrt{26}}{2})$

Exercice 3

1. (a) *On recopie et on complète le tableau correspondant à l'algorithme donné dans le texte:*

Test $C<400$		vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux
Valeur de C	*300*	*326*	*350*	*372*	*392*	*411*	
Valeur de n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	

   (b) *La valeur affichée en sortie d'algorithme est* 5*. Cela veut dire que pour l'année* 5*, c'est-à-dire en 2019, le nombre de colonies dépasse pour la première fois 400.*

2. *On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite* (C_n) *le terme* C_n *donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année* $2014 + n$.

   Ainsi $C_0 = 300$ *est le nombre de colonies en 2014.*

   (a) *D'une année sur l'autre, l'apiculteur perd 8 % de colonies donc il en reste 92 %. De plus, il installe 50 nouvelles colonies chaque printemps donc le nombre de colonies l'année* $n + 1$ *est le nombre de colonies l'année* n *multiplié par 0,92 auquel on va ajouter 50:*

   pour tout n, $C_{n+1} = 0,92 \times C_n + 50$

   (b) *On considère la suite* (V_n) *définie pour tout entier* n *par* $V_n = 625 - C_n$ *; donc* $C_n = 625 - V_n$.

   $V_{n+1} = 625 - C_{n+1} = 625 - 0,92 \times C_n - 50 = 575 - 0,92 \times (625 - V_n) = 575 - 575 + 0,92 \times V_n$

   $= 0,92 \times V_n$

   (c) *D'après la question précédente, on peut déduire que la suite* (V_n) *est géométrique de raison* $q = 0,92$ *et de premier terme* $V_0 = 625 - C_0 = 325$.

   Donc, pour tout n, $V_n = V_0 \times q^n = 325 \times 0,92^n$.

   Comme $C_n = 625 - V_n$, *on peut dire que, pour tout* n, $C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$.

   (d) *Le mois de juillet 2024 correspond à* $n = 10$*; l'apiculteur peut espérer posséder* C_{10} *colonies soit:* $C_{10} = 625 - 325 \times 0,92^{10} \approx 484$ *colonies.*

Exercice 4
Partie A

$f(0) = -4$ *donc :* $b = -4$

La tangente au point d'abscisse -1 est horizontale donc $f'(-1) = 0$. *Or :* $f'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x}$ *donc* $ae + ae - be = 0 \iff 2a - b = 0 \iff a = \dfrac{b}{2} = -2$

Partie B

1. *La fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *comme produit de fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$*:*

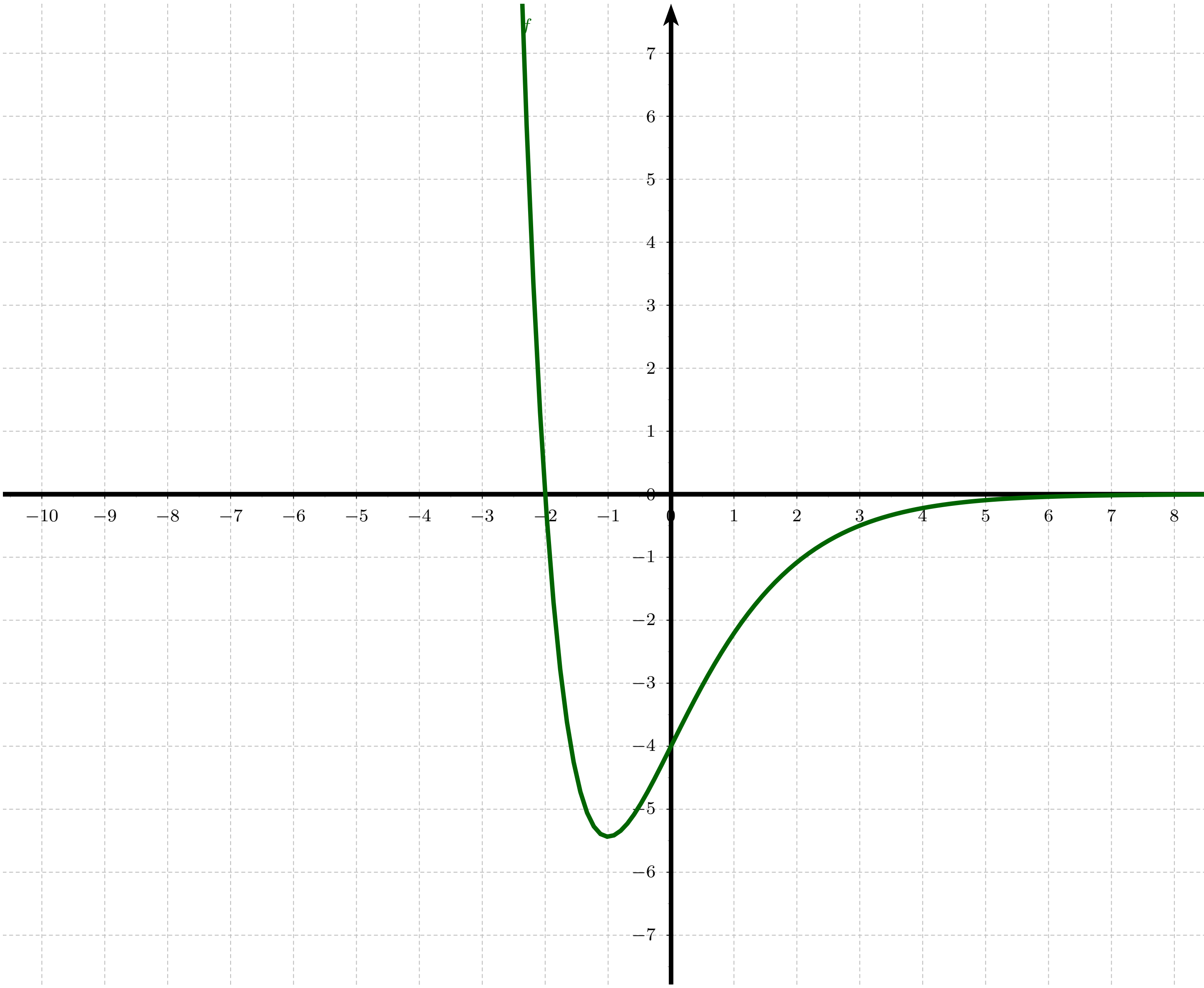
   $f'(x) = -2(1)e^{-x} - 2(x + 2)(-1)e^{-x} = (-2 + 2x + 4)e^{-x} = 2(x + 1)e^{-x}$

2. *Pour tout réel* x, $e^{-x} > 0$ *donc* $f'(x)$ *est du signe de* $x + 1$ *sur* $\mathbb{R}$.

   - *Si* $x < -1$, $f'(x) < 0$ *donc* f *est strictement décroissante sur* $]-\infty\,; -1[$;
   - *Si* $x > -1$, $f'(x) > 0$ *donc* f *est strictement croissante sur* $]-1\,; +\infty[$;
   - $f'(-1) = 0$ *et* f *admet un minimum en* -1 *égal à* $f(-1) = -2e$.

$y = 2x - 4$

Courbe


f
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−10
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8